Katolikus Középiskolák Matematika Versenye
2023/24. 2. forduló
10. évfolyam
Javítási útmutató

1. Egy téglatest éleinek aránya 3:5:6. Hány százalékkal változik a téglatest felszíne és térfogata, ha a legkisebb él 50 %-kal, míg a legnagyobb él 100%-kal nő? **11 pont**

Az eredeti téglatest élei: $a = 3x;\ b = 5x;\ c = 6x$	1 pont
A változtatott téglatest élei: $a' = 4{,}5x;\ b' = 5x;\ c' = 12x$	2 pont
Az eredeti téglatest felszíne: $A = 126x^2$	1 pont
A változtatott téglatest felszíne: $A' = 273x^2$	1 pont
$\frac{A'}{A} = 2{,}1666$	1 pont
A felszín tehát $116{,}66\%$-kal nőtt.	1 pont
Az eredeti téglatest térfogata: V= $90x^3$	1 pont
A változtatott téglatest térfogata: $V' = 270x^3$	1 pont
$\frac{V'}{V} = 3$	1 pont
A térfogat tehát 200%-kal nőtt.	1 pont

Összesen: 11 pont

2. Egy szabályos dobókockával 10-szer dobunk, a dobások eredményét feljegyezzük. Mennyi a valószínűsége, hogy tíz dobás után a dobott számok átlaga nagyobb lesz, mint a dobott számok mediánja ha az eddigi lejegyzett dobások értékei: 2, 1, 3, 5, 5, 3, 5, 6, 3? **10 pont**

Az átlag $\frac{33+x}{10}$, ahol x az utolsó dobás értéke.	2 pont
A medián értéke az utolsó dobás eredményének függvényében 3 féle lehet.	
1. eset, ha a dobás $1, 2\ vagy$ 3, ekkor a medián 3	
$\frac{33+x}{10} > 3 \rightarrow x > -3$	1 pont
A hiányzó dobás lehet 1, 2 vagy 3.	1 pont
2. eset, ha a dobás 4, ekkor a medián 3,5	
$\frac{33+x}{10} > 3{,}5 \rightarrow x > 2$	1 pont
A hiányzó dobás lehet 4.	1 pont
3. eset, ha a dobás 5 $vagy$ 6, ekkor a medián 4	

$\frac{33+x}{10} > 4 \rightarrow x > 7$ 1 pont

A hiányzó dobás nem lehet 5 $vagy$ 6. 1 pont

A valószínűség: $\frac{4}{6}$ 2 pont

Összesen: 10 pont

3. Határozd meg a következő egyenletet valós megoldásainak pontos értékét!

$$5x^2 - 15x - 14 = (x^2 - 3x - 2)^2$$

12 pont

$x^2 - 3x - 2 = a$ jelölést alkalmazva 2 pont

$5a - 4 = a^2$ 2 pont

$a_1 = 4;\ a_2 = 1$ 2 pont

1. eset: $x^2 - 3x - 2 = 4$ 1 pont

$x_1 = \frac{3+\sqrt{33}}{2};\ x_2 = \frac{3-\sqrt{33}}{2}$ 2 pont

2. eset: $x^2 - 3x - 2 = 1$ 1 pont

$x_3 = \frac{3+\sqrt{21}}{2};\ x_4 = \frac{3-\sqrt{21}}{2}$ 2 pont

Összesen: 12 pont

4. Az *ABCD* négyzet oldalfelezőpontjait összekötöttük a négyzet egy belső *P* pontjával. Az így keletkezett négyszögek közül háromnak a területe 18 cm^2; 21 cm^2 és 31 cm^2. Mekkora lehet a négyzet oldalának pontos értéke?

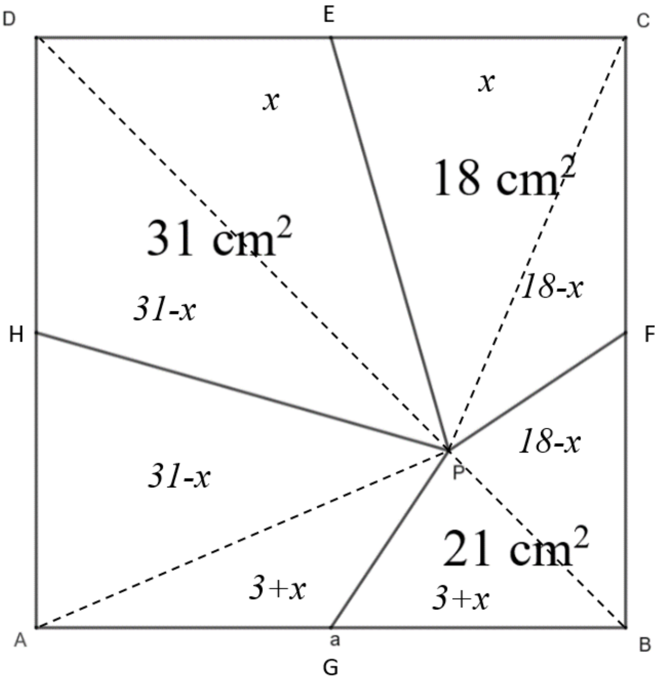
15 pont

1. eset: 21 cm^2 és 31 cm^2-es rész van egymással szemben:
Kössük össze a *P* pontot a négyzet mindegyik csúcsával. A keletkező háromszögek területei

$T_{DPE\Delta} = T_{CPE\Delta} = x$, hiszen *E* a *CD* oldal felezőpontja, ezért az *EP* szakasz felezi a $DPC\Delta$ háromszög területét. 2 pont

Hasonlóan: $T_{CPF\Delta} = 18 - x = T_{FPB\Delta}$ 1 pont

Hasonlóan: $T_{GPB\Delta} = 21 - (18 - x) = 3 + x = T_{APG\Delta}$ 1 pont



Hasonlóan: $T_{CPH\Delta} = 31 - x = T_{HPA\Delta}$ 1 pont

Így $T_{HPGA} = 31 - x + 3 + x = 34\ cm^2$ 1 pont

Azaz $T_{ABCD} = 31 + 21 + 18 + 34 = 104\ cm^2$ 1 pont

$a = \sqrt{104}\ cm$ 1 pont

Észre vehetjük, hogy $T_{HPGA} + T_{EPFC} = T_{DEPH} + T_{FBGB}$, azaz $T_{ABCD} = 2 \cdot (T_{DEPH} + T_{FBGB})$ 1 pont

2. eset: $21\ cm^2$ és $18\ cm^2$-es rész van egymással szemben:

$$T_{ABCD} = 2 \cdot (T_{DEPH} + T_{FBGB}) = 2 \cdot (21 + 18) = 78\ cm^2$$ 2 pont

$a = \sqrt{78}\ cm$ 1 pont

3. eset: $31\ cm^2$ és $18\ cm^2$-es rész van egymással szemben:

$T_{ABCD} = 2 \cdot (T_{DEPH} + T_{FBGB}) = 2 \cdot (31 + 18) = 98\ cm^2$ 2 pont

$a = \sqrt{98}\ cm$ 1 pont

Összesen: 15 pont

5. Mennyi a valószínűsége, hogy a $12; 15; 26; 35; 49; 58$ számok közül kettőt kiválasztva azok relatív prímek lesznek? **7 pont**

összes eset: $\binom{6}{2} = 15$ 2 pont

relatív prímek a következő párok:

$$(12; 35); (12; 49); (15; 26); (15; 49); (15; 58); (26; 35);$$
$$(26; 49); (35; 58); (49; 58)$$

9 jó pár 4 pont; 7-8 jó pár 3 pont; 4-6 jó pár 2 pont; 1-3 jó pár 1 pont

rossz számpárok felsorolása esetén 1 pont levonás

a keresett valószínűség: $\frac{9}{15}$ 1 pont

Összesen: 7 pont

6. Béci egy perselyébe csak 5, 10 és 20 eurós bankjegyeket gyűjtött. Az egyik hónap elején a perselyében a különböző címletekben ugyanannyi értékű pénze volt. A hónap végén mindegyik címletből ugyanannyi volt a perselyében úgy, hogy az egyik címletből nem került bele újabb darab.
   a) Hány euró lehetett összesen perselyben a hónap végén, ha az elején 56 db pénz volt benne? **7 pont**
   b) Hány darab bankjegy lehetett a perselyben a hónap végén, ha a hónap elején 240 euró volt benne? **5 pont**

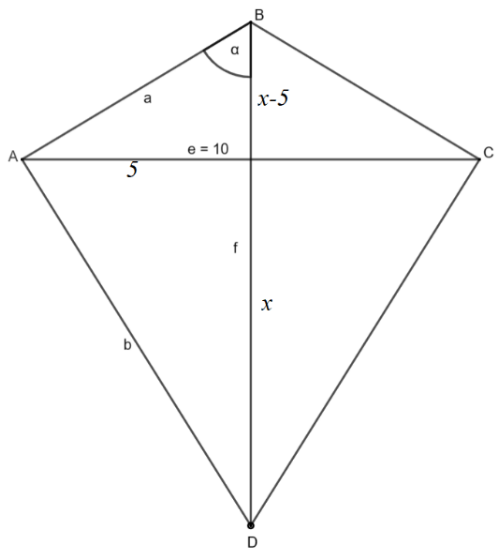
Az 5, 10 és 20 eurós bankjegyek számának aránya $4:2:1$ hiszen az értékük megegyezik. 2 pont

a) $4x + 2x + x = 56$ 2 pont
$x = 8$ 1 pont
A hónap elején 32 db 5 eurós, 16 db 10 eurós, 8 db 20 eurós volt a perselyben. 1 pont
Így (Béci hozzátett 16 db 10 euróst és 24 db 20 euróst, így) a hónap végén 1 120 euró volt a perselyben. 1 pont

b) $5 \cdot 4x + 10 \cdot 2x + 20 \cdot x = 240$ 2 pont
$x = 4$ 1 pont
A hónap elején 16 db 5 eurós, 8 db 10 eurós, 4 db 20 eurós volt a perselyben. 1 pont
Így (Béci hozzátett 8 db 10 euróst és 12 db 20 euróst, így) a hónap végén 48 db bankjegy volt a perselyben. 1 pont

Összesen: 12 pont

7. Egy derékszögű deltoidban a derékszögeket összekötő átló 10 cm hosszú. Ez az átló a szimmetria átlót 2 olyan részre osztja, melyek különbsége 5 cm. Mekkorák a deltoid szögei és mekkora a területe? **10 pont**



ABD derékszögű háromszögre alkalmazzuk a magasságtételt:

$5 = \sqrt{x \cdot (x - 5)}$ 2 pont
$x^2 - 5x - 25 = 0$ 2 pont
$x_1 = 8{,}09;\ x_2 = -3{,}09$ 1 pont
$T = \frac{10 \cdot 11{,}18}{2} = 55{,}9\ cm^2$ 1 pont
$tg\alpha = \frac{5}{3{,}09}$ 2 pont
$\alpha = 58{,}28°$ 1 pont
A deltoid derékszögnél különböző szögei: $116{,}56°; 63{,}44°$ 1 pont

Összesen: 10 pont

Katolikus Pedagógiai Intézet
Kulturális és Innovációs Minisztérium
Nemzeti Tehetség Program