

Katolikus Középiskolák Matematika Versenye
2020/21. DÖNTŐ
12. évfolyam

Kedves Versenyző!

Gratulálunk eddigi eredményedhez! Ebben a fordulóban hat feladatot kell megoldanod. A feladatokat tetszőleges sorrendben oldhatod meg, íróeszközön kívül számológépet és függvénytáblát lehet használni. A megoldás során mindent írd le, ami a megoldáshoz kapcsolódik. 90 perc áll rendelkezésedre. Minden feladatot külön lapra dolgozz ki, melyre legyen felírva a neved és a feladat sorszáma. Jó munkát kívánunk!

1. Mekkora a térfogata és felszíne, annak a 8 cm alapélű szabályos ötszög alapú gúlának, melynek oldaléle a lehető legkisebb egész szám? **15 pont**

2. Péter és Pál egyszerre indult egyirányban egy 500 méter hosszúságú kör alakú versenypályán kerékpárjával. Az első percben Péter 500 métert, míg Pál 550 métert tett meg. Majd minden ezt követő percben Péter 20 méterrel több utat tett meg, mint az előző percben, míg Pál 25 méterrel tesz meg több utat tett meg, mint az előző percben. A versenyt 20 körösre tervezik. Hányszor sikerül Pálnak lekörözni-e Pétert? A verseny utolsó percében hány méter utat tesz meg Pál? **12 pont**

3. Az ABC háromszög egyik csúcspontja $A(3; -2)$. A BC oldalfelezőmerőlegesének egyenlete: $5x - y = 8$, a B csúcsból induló súlyvonal egyenlete: $6x - 15y = -42$, míg a C csúcsból induló magasságvonal egyenlete: $5x + 8y = 54$. Határozd meg a háromszög hiányzó csúcsainak koordinátáit és annak a pontnak a koordinátáját, amely a háromszög csúcsaitól egyenlő távolságban van! **16 pont**

4. Egy 30 cm sugarú körcikkből a lehető legnagyobb térfogatú kúppalástot szeretnénk készíteni. Mekkora legyen a körcikk középponti szöge? **14 pont**

5. Legyenek adottak a következő halmazok $A = \{\text{négygyel osztva három maradékot adó pozitív egész számok}\}$, $B = \{5 \cdot 3^x | x \text{ egész számot jelöl}\}$. Kiválasztva két 10 000-nél kisebb legalább háromjegyű pozitív egész számot, mennyi a valószínűsége, hogy mindkettő eleme valamelyik adott halmaznak? Az eredmény négytizedesjegy pontossággal add meg! **15 pont**

6. Határozd meg a következő művelet eredményét:
$$\log_2 \left(\binom{64}{1} + 2 \cdot \binom{64}{2} + 3 \cdot \binom{64}{3} + \dots + 32 \cdot \binom{64}{32} \right) !$$
 11 pont