Katolikus Középiskolák Matematika Versenye
2025/26. 2. forduló, 2026. január 28.
12. évfolyam
Javítási útmutató

1. Az $\{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$ halmazból hányféleképpen választhatunk ki egy háromelemű részhalmazt, hogy az elemeket növekvő sorba írva egy számtani vagy egy mértani sorozatot alkossanak?

számtani sorozat esetén
$d = 1$ esetén $0, \dots, 7$ kezdetű sorozatok lehetnek, 8 db. (1 pont)
$d = 2$ esetén $0, \dots, 5$ kezdetű sorozatok lehetnek, 6 db. (1 pont)
$d = 3$ esetén $0, \dots, 3$ kezdetű sorozatok lehetnek, 4 db. (1 pont)
$d = 4$ esetén $0, 1$ kezdetű sorozatok lehetnek, 2 db. (1 pont)
mértani sorozat esetén
$q = 2$ esetén $1, 2$ kezdetű sorozatok lehetnek, 2 db. (1 pont)
$q = 3$ esetén 1 kezdetű sorozat lehetnek, 1 db. (1 pont)
$q = 1{,}5$ esetén 4 kezdetű sorozat lehetnek, 1 db. (2 pont)
Összesen 24 db. (1 pont)

Összesen: 9 pont

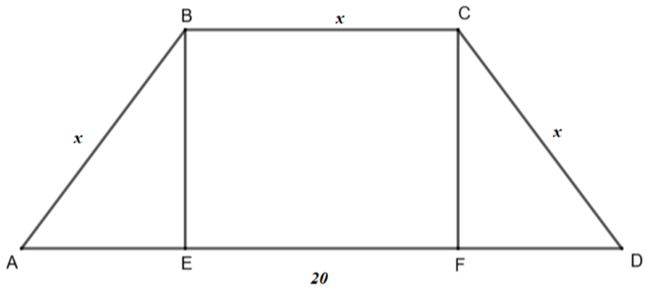
2. Egy 7 egész számból álló adatsokaság legkisebb eleme az 5, mediánja 10, terjedelme 11. A módusz megegyezik a felsőkvartilissel. A felsőkvartilis egyel nagyobb az alsókvartilis kétszeresénél. Melyek az adatsokaság lehetséges értékei?

növekvő sorrendben az elemek $x_1; \dots.; \ x_7$
$x_1 = 5; \ x_7 = 16$ (1 pont)
$x_4 = 10$ (1 pont)
$x_5 = x_6$ (1 pont)
$x_5 = x_6 = 2x_2 + 1$ (1 pont)
$5 < x_2 < 10$, ha $x_2 = 6$, akkor $x_5 = x_6 = 13$ (1 pont)
ha $x_2 = 7$, akkor $x_5 = x_6 = 15$ (1 pont)
$x_2 > 7$, akkor $x_5 = x_6 > 17$ (1 pont)
Így lehetséges megoldások így:
$5; 6; 7; 10; 13; 13; 16$
$5; 6; 8; 10; 13; 13; 16$
$5; 6; 9; 10; 13; 13; 16$ (2 pont)
$5; 7; 8; 10; 13; 13; 16$
$5; 7; 9; 10; 13; 13; 16$ (2 pont)

Összesen: 11 pont

3. Egy szimmetrikus trapéz alapja 20 cm. A szárai 60°-os szöget zárnak be az alappal. A rövidebb alap hossza megegyezik a szár hosszával. Mekkora **lehet** a trapéz területe?

1. eset



AET és DFC háromszög félszabályos, így

$AE = FD = \frac{x}{2}$ (2 pont)

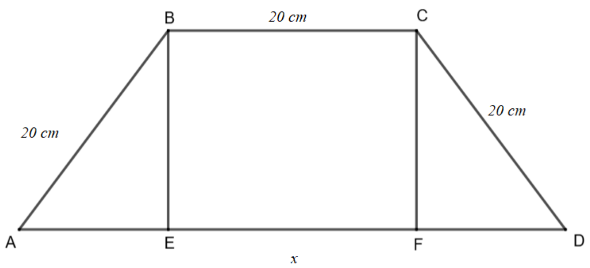
$AD = \frac{x}{2} + x + \frac{x}{2} = 20$ (1 pont)

$x = 10\ cm$ (1 pont)

$m = 5\sqrt{3}\ cm$ (1 pont)

$T = 75\sqrt{3}\ cm^2$ (1 pont)

2. eset:



AET és DFC háromszög félszabályos, így

$AE = FD = 10\ cm$ (2 pont)

$AD = 10 + 20 + 10 = 40\ cm$ (1 pont)

$m = 10\sqrt{3}\ cm$ (1 pont)

$T = 300\sqrt{3}\ cm^2$ (1 pont)

Összesen: 11 pont

4. Az egyik stream szolgáltatónak 8000 Ft-os havi díj mellett 2000 előfizetője van. A felmérések az mutatják, hogy 100 Ft-os díjcsökkentés esetén 50-nel több előfizető köt szerződést. Hány Ft-os havidíj esetén lesz a szolgáltató havi bevétele maximális?

x alkalommal történt változtatás után
$8000 - 100x$ Ft az előfizetési díj (1 pont)
$2000 + 50x$ előfizető lesz (1 pont)
A bevétel: $(8000 - 100x)(2000 + 5x)$ (1 pont)
$-5000x^2 + 200\,000x + 1\,600\,000$ (1 pont)
$-5000(x - 20)^2 + 18\,000\,000$ (2 pont)
maximuma $x = 20$ esetén lesz (1 pont)
A havidíj 6 000 Ft lesz. (1 pont)
A maximális bevétel: 1 800 000 Ft lesz. (1 pont)

Összesen: 9 pont

KATOLIKUS PEDAGÓGIAI INTÉZET
KULTURÁLIS ÉS INNOVÁCIÓS MINISZTÉRIUM
Nemzeti Tehetség Program

5. Egy dobozban 1-től 9-ig számozott cédulák vannak. A dobozból egymásután visszatevéssel húzunk. Hány húzás kell ahhoz, hogy annak a valószínűsége, hogy legalább egyszer 6-ost húzunk, minimum 0,92026?

Annak a valószínűsége, hogy nincs 6-os a húzottak között: $\frac{8}{9}$ (1pont)

x húzás esetén $\left(\frac{8}{9}\right)^x$ (1 pont)

$\left(\frac{8}{9}\right)^x < 0{,}07974$ (2 pont)

$lg\left(\frac{8}{9}\right)^x < lg0{,}07974$ (1 pont)

$xlg\left(\frac{8}{9}\right) < lg0{,}07974$ (1 pont)

$x > 21{,}47$ (1 pont)

tehát legalább 22-szer kell húzni. (1 pont)

Összesen: 8 pont

6. Mely x, y valós számokra teljesülnek a következő egyenlőtlenségek?
   a) $x^2 + y^2 + 61 > 10x - 12y$
   b) $x^2 + y^2 + 26 \leq xy - 4x - 6y$

a) $(x-5)^2 + (y+6)^2 > 0$ (2 pont)
mindkét tag nemnegatív, így az összeg is. (1 pont)
$x \neq 5; y \neq -6$ kivételével minden számpár megoldás. (1 pont)

b) $(x-y)^2 + (x+4)^2 + (y+6)^2 \leq 0$ (4 pont)
mindhárom tag nemnegatív, így az összeg is. (1 pont)
$x = y; x = -4; y = -6$ esetén teljesül az egyenlőtlenség. (1 pont)
Ellentmondó feltételek miatt, nincs megoldás. (1 pont)

Összesen: 11 pont

7. Egy 10 cm élű kocka csúcsaiból levágunk egyforma méretű, azonos oldalél hosszúságú háromszög alapú gúlákat. Ezáltal a kocka felszíne 20%-kal csökkent. Mekkora keletkező test térfogata?

A kocka felszíne minden csúcsnál csökken 3 db *x* oldalú egyenlőszárú háromszög területével, (1 pont)

ami $\frac{x^2}{2}$. (1 pont)

A kocka felszíne minden csúcsnál nő a 3 db *x* oldalú egyenlőszárú háromszög átfogói alkotta szabályos háromszög területével. (1 pont)

Az említett átfogó hossza: $x\sqrt{2}$ (1 pont)

A háromszög területe $\frac{x^2\sqrt{3}}{2}$ (1 pont)

Az eredeti kocka felszíne: $600\ cm^2$. (1 pont)

Az új test felszíne: $600 - 8 \cdot 3 \cdot \frac{x^2}{2} + 8 \cdot \frac{x^2\sqrt{3}}{2}$ (2 pont)

$600 - 8 \cdot 3 \cdot \frac{x^2}{2} + 8 \cdot \frac{x^2\sqrt{3}}{2} = 480$ (1 pont)

$x = 4{,}86\ cm$ (2 pont)

$V = 10^3 - 8 \cdot \frac{\frac{4{,}86^2}{2} \cdot 4{,}86}{3}$ (3 pont)

$V = 846{,}94\ cm^3$ (1 pont)

Összesen: 15 pont