Katolikus Középiskolák Matematika Versenye
2025/26. 2. forduló, 2026. január 28.
11. évfolyam
Javítási útmutató

1. Egy üdítőgyártó gép a minőségellenőrzésen, akkor felel meg, ha a véletlenszerűen megvizsgált darabok átlagos töltöttsége legfeljebb 0,5%-kal térhet el a csomagoláson feltüntetett mennyiségtől. Az egyik termék csomagolásán a 2 liter mennyiség van feltüntetve. Az ellenőrzésen eddig megvizsgált termékekben 19,7; 19,8; 19,9; 19,5; 19,6; 19,7 dl üdítőt mértek. Hány palack pontosan töltött üdítőt kellene még megvizsgálni, ha azt szeretnénk, hogy a gyártó gép megfeleljen a minőség ellenőrzésen?

Az eddigi adatok összege: $118{,}2$ (1 pont)

x elem esetén az átlag $\frac{118{,}2+20x}{x+6}$ (1 pont)

$\frac{118{,}2+20x}{x+6} \geq 0{,}995 \cdot 20$ (2 pont)

$x \geq 12$ (1 pont)

Tehát még legalább 12 db terméket kell megvizsgálni. (1 pont)

Összesen: 6 pont

2. Oldd meg a következő egyenleteket!
   a) $\sqrt{x+4} + 37 = 2x$
   b) $(x-2)^3 - (3x-2)^2 = 10x - 12$

a)

$x \geq -4$ (1 pont)

$\sqrt{x+4} = 2x - 37$

$x + 4 = (2x-37)^2$ (1 pont)

$x + 4 = 4x^2 - 148x + 1369$ (1 pont)

$x_1 = 21;\ x_2 = \frac{65}{4}$ (1 pont)

$x_2 = \frac{65}{4}$ ellenőrzés alapján nem megoldás (1 pont)

$x_1 = 21$ ellenőrzés alapján jó megoldás (1 pont)

b)

$x^3 - 6x^2 + 12x - 8 - (9x^2 - 12x + 4) = 10x - 12$ (2 pont)

$x^3 - 15x^2 + 14x = 0$ (1 pont)

$x(x^2 - 15x + 14) = 0$ (1 pont)

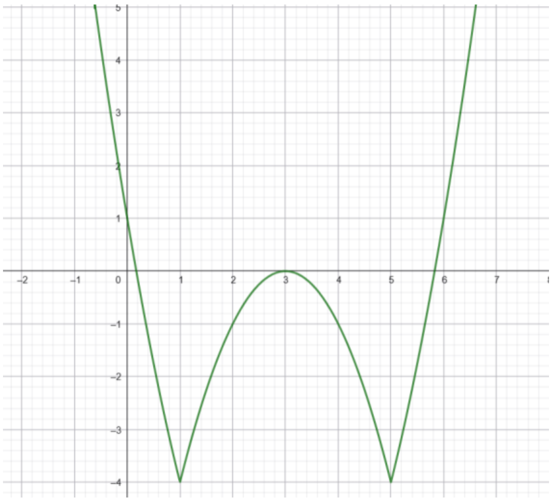
$x_1 = 0;\ x_2 = 1;\ x_3 = 14$ (3 pont)

ellenőrzés (1 pont)

Összesen: 14 pont

KATOLIKUS PEDAGÓGIAI INTÉZET
KULTURÁLIS ÉS INNOVÁCIÓS MINISZTÉRIUM
Nemzeti Tehetség Program

3. Határozd meg az $f:]-5; 6] \to \mathbb{R}; x \to |x^2 - 6x + 5| - 4$ függvény helyi és globális szélsőérték pontjait!



$|(x-3)^2 - 4| - 4$ (2 pont)

ábra (ez a pont, akkor is jár, ha helyes megoldásra vezet a versenyző gondolatmenete) (3 pont)

globális maximuma nincs, -5-nél nyitott az intervallum (1 pont)

globális minimum pontjai: $(1; -4)$; $(5; -4)$ (1 pont)

lokális maximumai: $(3; 0)$; $(6; 1)$ (2 pont)

Összesen: 9 pont

4. Egy előrejelzés szerint az egyik populáció száma az elkövetkező években megközelítőleg a következő összefüggés szerint alakul: $2026 \cdot 0{,}945^t$, ahol t a 2026-tól eltelt évek számát jelöli.
a) Számítsd ki, hogy az előrejelzés alapján 2030-ra hány százalékkal csökken a populáció egyedeinek a száma?
b) Melyik évben várható, hogy a populáció egyedeinek száma 500 alá csökken?

a)
2030-ban: $2026 \cdot 0{,}945^4$ (1 pont)
azaz $0{,}945^4 = 0{,}7975$ (1 pont)
20,25%-kal csökken (1 pont)

b)
$2026 \cdot 0{,}945^t < 500$ (1 pont)
$0{,}945^t < 0{,}2468$ (1 pont)
$lg 0{,}945^t < lg 0{,}2468$ (1 pont)
$t lg 0{,}945 < lg 0{,}2468$ (1 pont)
$t > 24{,}73$ (1 pont)
Tehát 2051-re várható. (1 pont)

Összesen: 9 pont

5. Egy dobozban 1-től 8-ig számozott cédula van. A dobozból egymásután, visszatevéssel húzunk 2 cédulát. A esemény jelölje, ha a kihúzott cédulákon lévő számok relatív prímek. B esemény jelölje, ha a kihúzott cédulákon lévő számok szorzata páratlan szám. C esemény jelölje, ha a cédulákon lévő számok szorzata nagyobb, mint 30. Határozd meg a következő valószínűségeket!
   a) $P(A)$
   b) $P(A+C)$
   c) $P(B \cdot C)$
   d) $P\big((A+B) \cdot C\big)$

a) összes eset: 64 (1 pont)

nem relatív prím párok: $(2;2);\ (3;3);\ (4;4);\ (5;5);\ (6;6);\ (7;7);\ (8;8)$ 7 db (1 pont)

$(2;4);\ (2;6);\ (2;8);\ (3;6);\ (4;6);\ (4;8);\ (6;8)\ \rightarrow 7 * 2 = 14$ db eset (1 pont)

tehát 43 relatív prím számpár van. (1 pont)

$P(A) = \frac{43}{64}$ (1 pont)

b) A nem relatív párok közül $(6;6);\ (7;7);\ (8;8);\ (4;8);\ (6;8);\ (8;4);\ (8;6)$ tartoznak a C eseményhez, 7 db. (1 pont)

$P(A+C) = \frac{50}{64}$ (1 pont)

c) $(7;7); (5;7);\ (7;5)$, 3 db számpár tartozik a B és a C eseményhez is. (1 pont)

$P(B \cdot C) = \frac{3}{64}$ (1 pont)

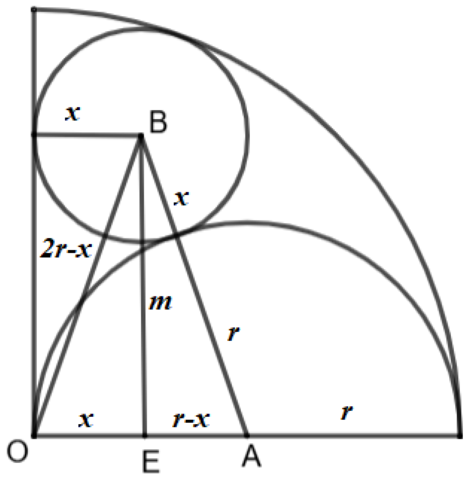
d) A feltételeknek megfelelő számpárok:

$(5;7);\ (5;8);\ (6;7);\ (7;8);\ (7;7);\ (7;5);\ (8;5);\ (7;6); (8;7)$ (1 pont)

$P\big((A+B) \cdot C\big) = \frac{9}{64}$ (1 pont)

Összesen: 11 pont

6. Egy $20\,cm$ sugarú negyedkörben a határoló sugara, mint átmérő fölé félkört rajzolunk. Mekkora annak a körnek a sugara, amely érinti a negyedkört belülről, másik határoló sugarat, valamint a félkört kívülről?



$r = 10\,cm$ (1 pont)

$AB = 10 + x$ (1 pont)

$OB = 20 - x$ (1 pont)

$OE = x; EA = 10 - x$ (1 pont)

$x^2 + m^2 = (20 - x)^2$ (1 pont)

$(10 - x)^2 + m^2 = (10 + x)^2$ (1 pont)

A két egyenletet kivonva:

$100 - 20x + x^2 - x^2 = 100 + 20x + x^2 - 400 + 40x - x^2$ (2 pont)

$x = 5\,cm$ (2 pont)

Összesen: 10 pont

7. Mely x, y valós számokra teljesülnek a következő egyenlőtlenségek?
   a) $x^2 + y^2 + 61 > 10x - 12y$
   b) $x^2 + y^2 + 26 \leq xy - 4x - 6y$

a) $(x - 5)^2 + (y + 6)^2 > 0$ (2 pont)

mindkét tag nemnegatív, így az összeg is. (1 pont)

$x \neq 5; y \neq -6$ kivételével minden számpár megoldás. (1 pont)

b) $(x - y)^2 + (x + 4)^2 + (y + 6)^2 \leq 0$ (4 pont)

mindhárom tag nemnegatív, így az összeg is. (1 pont)

$x = y; x = -4; y = -6$ esetén teljesül az egyenlőtlenség. (1 pont)

Ellentmondó feltételek miatt, nincs megoldás. (1 pont)

Összesen: 11 pont

KATOLIKUS PEDAGÓGIAI INTÉZET
KULTURÁLIS ÉS INNOVÁCIÓS MINISZTÉRIUM
Nemzeti Tehetség Program