Katolikus Középiskolák Matematika Versenye
2025/26. 2. forduló, 2026. január 28.
10. évfolyam
Javítási útmutató

1. A Kovács családban az édesanya és az édesapa együttes keresete 1 140 000 Ft. Januárban az apa fizetését 9,5 %-kal, míg az anya fizetését kétszer annyi forinttal emelték meg, mint az apa fizetését. A család bevétele így 15,75 %-kal emelkedett. Hány százalékkal emelkedett az édesanya fizetése, ha a családban más személy nem rendelkezett jövedelemmel? Menyi lett az édesapa keresete januárban? A szülők úgy döntöttek, hogy ebben az évben a három gyerekük havi zsebpénzét is megemelik összesen 30 000 Ft-tal. Hányféleképpen emelhetik meg a gyerekek zsebpénzét, ha minden gyereknek szeretnének adni plusz pénzt s ez minden esetben a 2000 Ft többszöröse lesz?

x az apa, $1\,140\,000 - x$ az anya fizetése	(1 pont)
apa új fizetése $1{,}095x$	(1 pont)
anya újfizetése $1\,140\,000 - x + 2 \cdot 0{,}095x$	(1 pont)
$1{,}095x + 1\,140\,000 - x + 2 \cdot 0{,}095x = 1{,}1575 \cdot 1\,140\,000$	(1 pont)
$x = 630\,000$ Ft	(2 pont)
anya új fizetése $510\,000 + 2 \cdot 0{,}095 \cdot 630\,000 = 629\,700$ Ft	(1 pont)
23,47%-os fizetésemelést jelent	(1 pont)

Összesen: 8 pont

15 db 2000 Ft-os címletet kell szétosztani a gyerekek között.	(1 pont)
15 db tárgyat 3 felé 2 osztással tudunk szétosztani.	
a kétosztáshelyet 14 hely közül választhatjuk ki	
$\binom{14}{2} = 91$ féleképpen osztható szét	(3 pont)

Összesen: 4 pont

2. Oldd meg a következő egyenleteket!
   a) $\sqrt{x+4} + 37 = 2x$
   b) $(x-2)^3 - (3x-2)^2 = 10x - 12$

a)

$x \geq -4$	(1 pont)
$\sqrt{x+4} = 2x - 37$	
$x + 4 = (2x-37)^2$	(1 pont)
$x + 4 = 4x^2 - 148x + 1369$	(1 pont)
$x_1 = 21;\ x_2 = \frac{65}{4}$	(1 pont)

$x_2 = \frac{65}{4}$ ellenőrzés alapján nem megoldás (1 pont)

$x_1 = 21$ ellenőrzés alapján jó megoldás (1 pont)

b)

$x^3 - 6x^2 + 12x - 8 - (9x^2 - 12x + 4) = 10x - 12$ (2 pont)

$x^3 - 15x^2 + 14x = 0$ (1 pont)

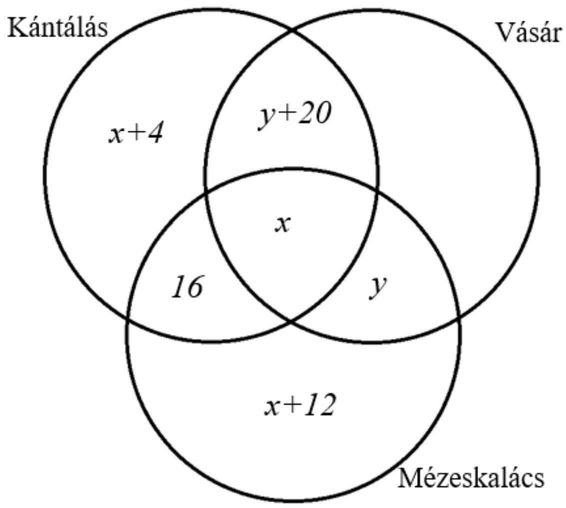
$x(x^2 - 15x + 14) = 0$ (1 pont)

$x_1 = 0;\ x_2 = 1;\ x_3 = 14$ (3 pont)

ellenőrzés (1 pont)

Összesen: 14 pont

3. Az egyik egyházközségben, decemberben több közösségi programot is szerveztek. Ezek között volt mézeskalácssütés, kántálás és adventi vásár is. Akik csak a mézeskalácssütésen tudtak részt venni 12-vel többen voltak, mint akik mindhárom programra eltudtak menni és 8-cal többen, mint akik csak a kántáláson vettek részt. A mézeskalácssütésen is és a kántáláson is résztvevők 12-vel voltak többen, mint akik csak a kántáláson vettek részt. Az adventi vásáron is és a kántáláson is résztvevők 20-szal többen voltak, mint a vásáron is és a mézeskalácssütésen is résztvevők. Az adventi vásárra 188-an, a mézeskalácssütésre 97-en, míg 102-en voltak azok, akik legalább két eseményen is részt tudtak venni. A részt vevők hány százaléka vett részt mindhárom eseményen?



A mindhárom programon résztvevők számát jelölje *x*, míg akik csak a mézeskalácssütésen résztvevők számát *x+12* (1 pont)

A csak a kántáláson résztvevők száma *x+4* (1 pont)

A mézeskalácssütésen is és a kántáláson is résztvevők száma *x+16* (1 pont)

adventi vásáron is és a kántáláson is résztvevők száma *y+20*, míg az adventivásáron résztvevők száma *y* (1 pont)

Mézeskalácssütésen résztvevők száma:

$2x + y + 28 = 97$ (1 pont)

A legalább két eseményen résztvevők száma:

$x + 2y + 36 = 102$ (1 pont)

$x = 24, y = 21$ (2 pont)

A három programon 268 résztvevő volt. (1 pont)

8,96 % vett részt mindhárom eseményen (1 pont)

Összesen: 10 pont

4. Egy téglatest testátlójának a négyzete 2026. A téglatest egyik éle 1 egységgel rövidebb a másik két él számtani közepénél. A téglatest két rövidebb élének aránya 5:8. Mekkora a téglatest felszíne?

$a = 5x; b = 8x$ (1 pont)

1. eset: $\frac{5x+8x}{2} - 1 = c \rightarrow c = 6{,}5x - 1$, c nem a leghosszabb él. (1 pont)

2. eset: $\frac{c+8x}{2} - 1 = 5x \rightarrow c = 2x + 2,\ 2x + 2 > 8x \rightarrow x < \frac{1}{3}$

A téglatest élei legfeljebb $\frac{5}{3}; \frac{8}{3}; \frac{8}{3}$ a testátló hossza $\frac{\sqrt{153}}{3} < \sqrt{2026}$ (1 pont)

3. eset: $\frac{5x+c}{2} - 1 = 8x \rightarrow c = 11x + 2$ (1 pont)

A téglatest élei $5x;\ 8x; 11x + 2$

$(5x)^2 + \ (8x)^2 + (11x + 2)^2 = 2026$ (2 pont)

$210x^2 + 44x - 2022 = 0$ (2 pont)

$x_1 = 3;\ x_2 = -\frac{337}{105}$ (1 pont)

Az élei: $15; 24; 35$ (1 pont)

A felszíne: $3\,450$ (1 pont)

Összesen: 11 pont

5. Az egyik stream szolgáltatónak 8000 Ft-os havi díj mellett 2000 előfizetője van. A felmérések az mutatják, hogy 100 Ft-os díjcsökkentés esetén 50-nel több előfizető köt szerződést. Hány Ft-os havidíj esetén lesz a szolgáltató havi bevétele maximális?

x alkalommal történt változtatás után

$8000 - 100x$ Ft az előfizetési díj (1 pont)

$2000 + 50x$ előfizető lesz (1 pont)

A bevétel: $(8000 - 100x)(2000 + 5x)$ (1 pont)

$-5000x^2 + 200\,000x + 1\,600\,000$ (1 pont)

$-5000(x - 20)^2 + 18\,000\,000$ (2 pont)

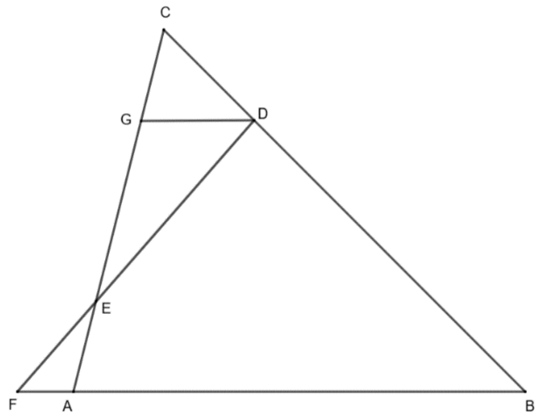
maximuma $x = 20$ esetén lesz (1 pont)

A havidíj 6 000 Ft lesz. (1 pont)

A maximális bevétel: 1 800 000 Ft lesz. (1 pont)

Összesen: 9 pont

6. Az ABC háromszög BC oldalának C-hez közelebbi negyedelő pontja legyen D, A CA oldalának A-hoz közelebbi negyedelő pontja legyen E. A DE egyenes az AB egyenest a F pontban metszi. Mekkora a FAE háromszög területe, ha az ABC háromszög terület 40 m^2.



$GDC\Delta \sim ABC\Delta$ hasonlóság aránya $1:4$ 2 pont

$T_{GDC} = \frac{40}{16} = \frac{5}{2}\ m^2$ 2 pont

$T_{GDE} = 2 \cdot T_{GDC} = 5\ m^2$ 2 pont

mert a két háromszög egyik oldala (GD) közös és a GDE háromszög GD magassága kétszerese GDC háromszög GD oldalához tartozó magasságának 3 pont

$GDE\Delta \sim AFE\Delta$ hasonlóság aránya $2:1$ 1 pont

$T_{AFE} = \frac{5}{4}\ m^2 = 1{,}25\ m^2$ 2 pont

Összesen: 12 pont

7. Mely x, y valós számokra teljesülnek a következő egyenlőtlenségek?
   a) $x^2 + y^2 + 61 > 10x - 12y$
   b) $x^2 + y^2 + 26 \leq xy - 4x - 6y$

a) $(x-5)^2 + (y+6)^2 > 0$ (2 pont)
mindkét tag nemnegatív, így az összeg is. (1 pont)
$x \neq 5; y \neq -6$ kivételével minden számpár megoldás. (1 pont)

b) $(x-y)^2 + (x+4)^2 + (y+6)^2 \leq 0$ (4 pont)
mindhárom tag nemnegatív, így az összeg is. (1 pont)
$x = y; x = -4; y = -6$ esetén teljesül az egyenlőtlenség. (1 pont)
Ellentmondó feltételek miatt, nincs megoldás. (1 pont)

Összesen: 11 pont